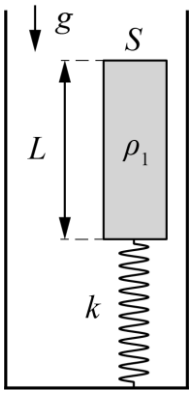
Задача 2.8.3. Груз на пружинке (10 баллов). Груз плотности ρ_1 = 0,80 г/см^3 прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости k = 50 Н/м, нижний конец которой соединён с дном сосуда. Длина пружины в недеформированном состоянии L_0 = 10 см, высота груза L = 12,5 см, площадь поперечного сечения груза S = 10 см^2.

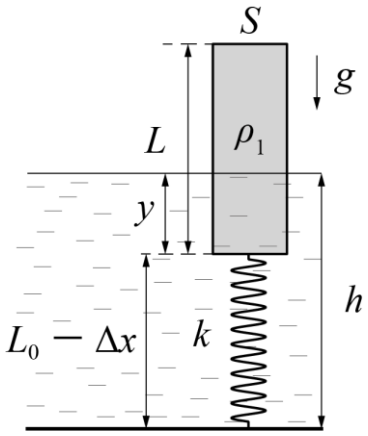


В сосуд начинают медленно наливать воду.

Найдите зависимость деформации Δx пружины от уровня h воды в сосуде. Плотность воды ρ = 1,00 г/см^3, g = 10 Н/кг.

Укажите, при каких значениях h пружина растянута. Постройте график зависимости Δx от h, считая, что если пружина сжата то $\Delta x < 0$.

Возможное решение (О. Инишева). Масса груза $m = \rho_1 SL = 0{,}1$ кг. Определим начальную деформацию Δx_0 пружины (сосуд без воды).



$$k\Delta x_0 = mg; \qquad \Delta x_0 = \frac{mg}{k} = 0{,}02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

Этому соответствует длина пружины $L_1 = L_0 - \Delta x_0 = 8$ см. Когда в сосуд начнут наливать воду, сжатие пружины не изменится до тех пор, пока уровень воды h_1 не достигнет значения $L_1 = 8$ см.

Пусть теперь уровень жидкости $h > h_1 = 8{,}0$ см. Пружина по-прежнему сжата, а сила упругости $F_{\text{упр}}$ направлена вверх. Кроме того, на тело действует сила Архимеда. С увеличением уровня, будет увеличиваться и сила Архимеда, а деформация пружины уменьшаться. Запишем условие равновесия тела:

$$mg = F_{\text{упр}} + F_{\text{Арх}}. \qquad (1)$$

Сила Архимеда

$$F_{\text{Арх}} = \rho g S y = \rho g S\left(h - \left(L_0 - \Delta x\right)\right). \qquad (2)$$

Сила упругости

$$F_{\text{упр}} = k\Delta x. \qquad (3)$$

С учетом уравнений (1), (2), (3) получаем выражение для нахождения величины деформации пружины

$$mg = k\Delta x + \rho g S\left(h - \left(L_0 - \Delta x\right)\right).$$

Определим деформацию Δx:

$$\Delta x = \frac{mg + \rho g S\left(L_0 - h\right)}{k + \rho g S}.$$

Числитель обращается в ноль при $h_0 = 0{,}2$ м.

Длина пружины в этом случае равна $L_0 = 10$ см, следовательно, в жидкости находится часть груза высотой $h_0 - L_0 = 10$ см.

Рассмотрим случай $h > h_0$. Теперь сила упругости направлена вниз, пружина будет растянута, условие равновесия примет вид:

$$mg + F_{\text{упр}} = F_{\text{Арх}}.$$

С учётом выражений для $F_{\text{Арх}}$ и $F_{\text{упр}}$ получим

$$\Delta x = \frac{\rho g S h - \rho g S L_0 - mg}{k + \rho g S}. \qquad (4)$$

Определим минимальную высоту уровня жидкости h_2, при которой тело окажется полностью погружённым в жидкость. $h_2 = L + L_0 + \Delta x.$ (5)

Решая систему уравнений (4) и (5), получим

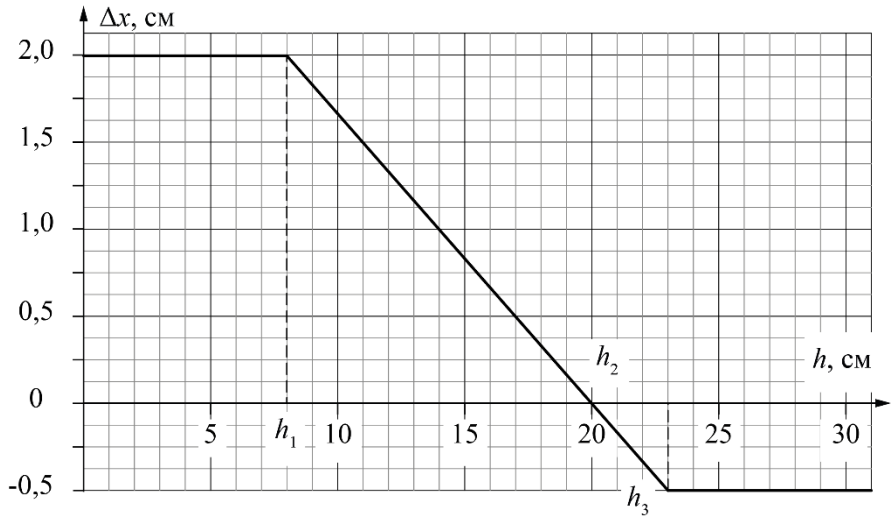
$$h_2 = 23 \text{ см}.$$

Соответствующая этому уровню жидкости деформация пружины

$$\Delta x_2 = 0,5\,\text{см}.$$

При $h > h_2$ тело окажется полностью погруженным в жидкость и сила Архимеда изменяться не будет, как и деформация пружины.

График зависимости деформации пружины от высоты уровня жидкости приведен на рисунке.



№	Задача 2.8.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Определена начальная деформация пружины (2 см)	1
2	Определен уровень $h_1 = 8$ см. При $h < h_1$ пружина сжата, величина деформации не изменяется	1
3	Описан случай $8\text{ см} < h < 20\ см$, пружина сжата, величина деформации уменьшается	2
4	Найдено h_0 = 20 см, отмечено, что пружина не деформирована	1
5	Рассмотрен случай $20\text{ см} < h < 23\ см$, пружина растянута, величина деформации увеличивается	2
6	Рассмотрен случай h > 23 см, величина деформации не изменяется и равна 0,5 см, пружина растянута	1
7	Построен график	2
	Подписаны оси и указаны единицы измерения (0,5 балла)	
	Выбран разумный масштаб осей (0,5 балла)	
	Указаны характерные точки (0,5 балла)	
	Через экспериментальные точки проведена линия графика (0,5 балла)	